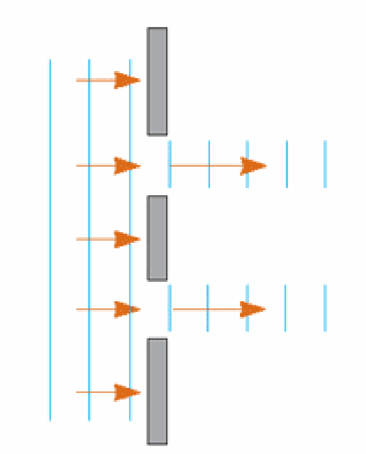
Ottica ondulatoria

Interferenza e diffrazione

Interferenza delle onde luminose

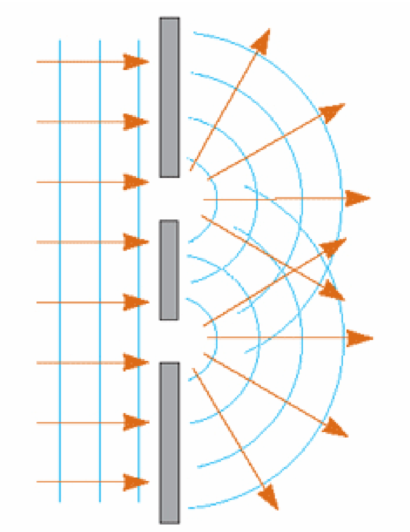
Sorgenti coerenti: la differenza di fase resta costante nel tempo

Onda luminosa piana che giunge su uno schermo contenente due fenditure sottili e parallele



Se la luce viaggiasse solo nella direzione originaria dopo aver attraversato le fenditure non si avrebbe interferenza

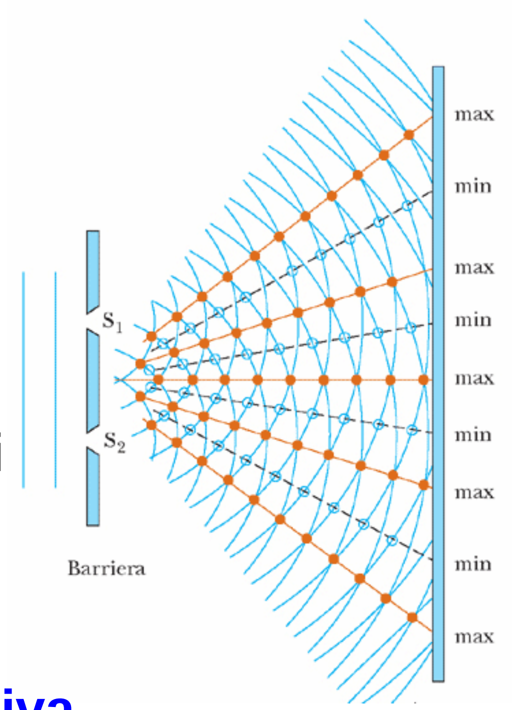
Per il **principio di Huygens** invece, le onde si allargano dalla fenditura, la luce devia quindi dalla propagazione rettilinea e raggiunge la regione di spazio che, in caso contrario, sarebbe in ombra.

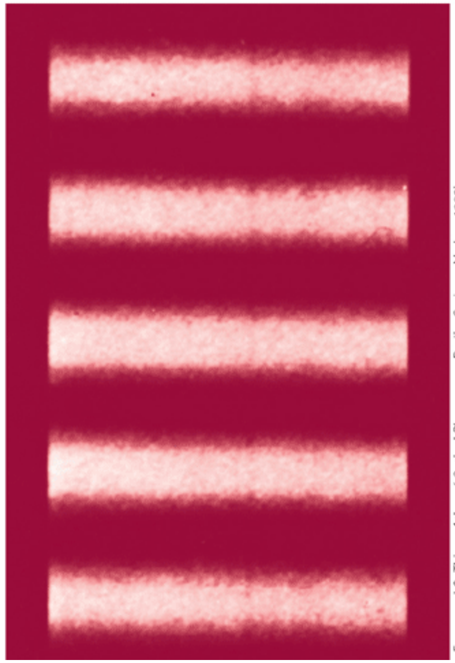


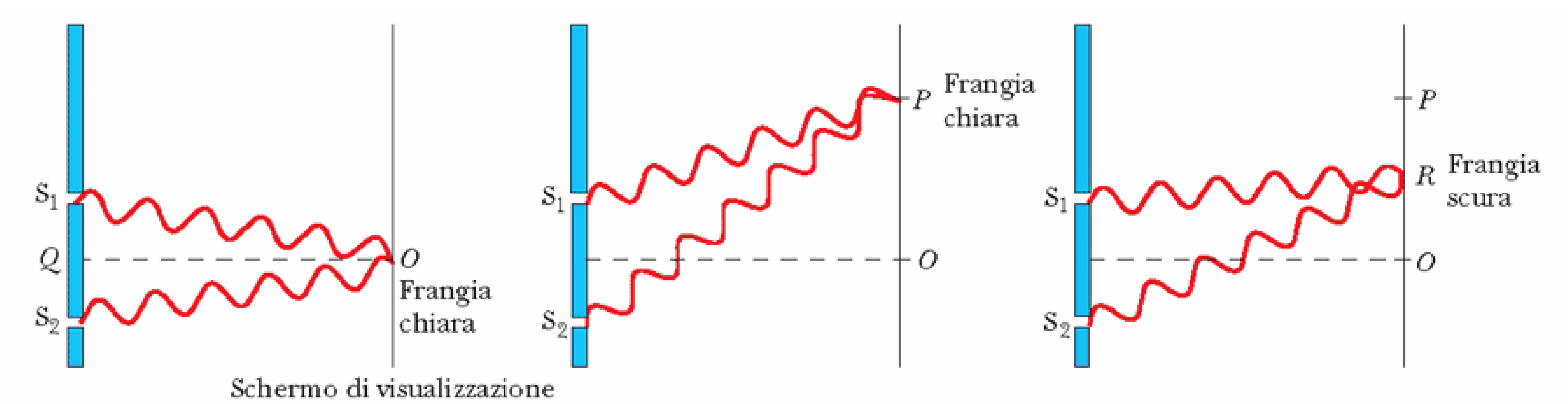
Esperimento della doppia fenditura di Young

Si osserva sullo schermo una **figura di interferenza**, caratterizzata dall'alternarsi di bande parallele chiare e scure, dette **frange di interferenza**

Le frange chiare corrispondono ai punti dove si ha **interferenza costruttiva**, le frange scure viceversa sono il risultato di fenomeni di **interferenza distruttiva**

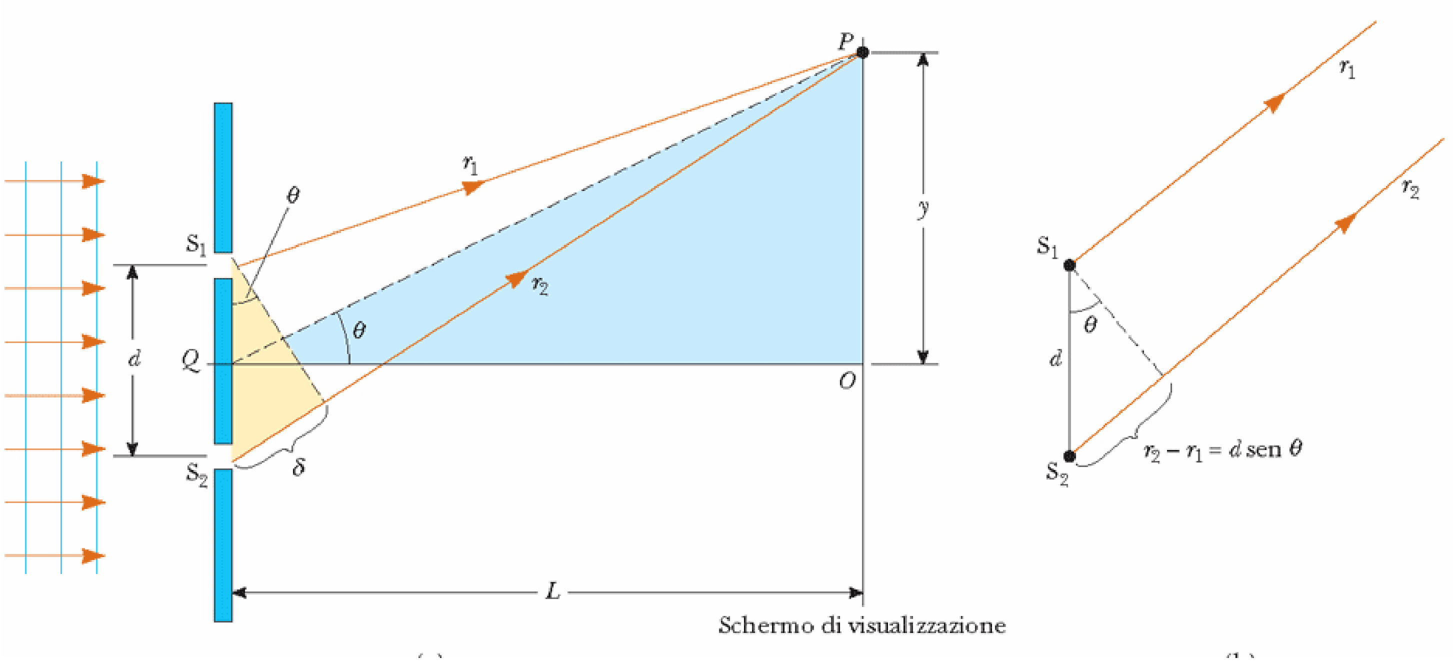






Francon, J.C. Thrierr, *Atlas of Optical Phenomena*, Berlin, Springer-Verlag, 1962)

Esperimento della doppia fenditura di Young



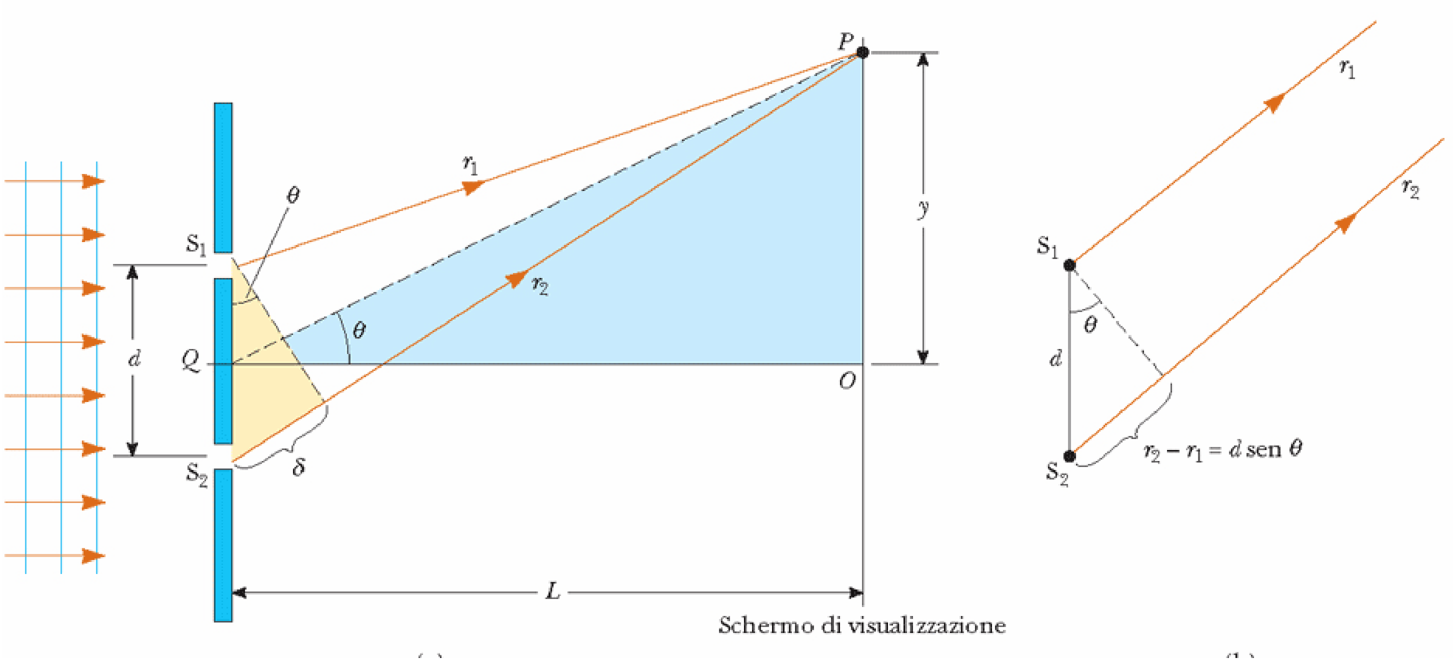
Per *L*>>*d* la **differenza di cammino ottico** è: $\delta = r_2 - r_1 = d \cdot sen\vartheta$

Se la differenza di cammino ottico è **zero o un multiplo intero** di lunghezza d'onda, le due onde arrivano in fase in P e si ha **interferenza costruttiva**.

La condizione per ottenere frange chiare (interferenza costruttiva) è:

$$d \cdot sen\vartheta_{chiare} = m \cdot \lambda \qquad (m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;....)$$

Esperimento della doppia fenditura di Young



Per *L*>>*d* la **differenza di cammino ottico** è: $\delta = r_2 - r_1 = d \cdot sen\vartheta$

Se la differenza di cammino ottico è **un multiplo dispari** di mezza lunghezza d'onda, le due onde arrivano in P con una differenza di fase di 180° e si ha **interferenza distruttiva**.

La condizione per ottenere frange scure (interferenza distruttiva) è:

$$d \cdot sen\vartheta_{scure} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda \qquad (m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots.)$$

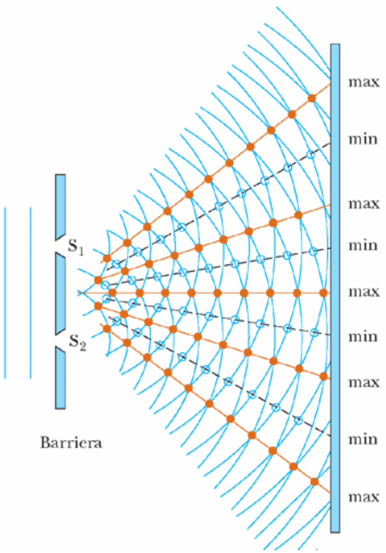
Esperimento della doppia fenditura di Young

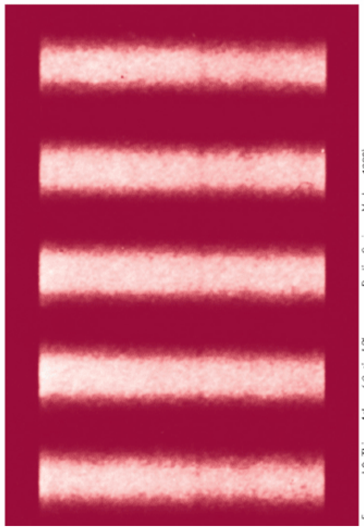
La condizione per ottenere frange chiare (interferenza costruttiva) è:

$$\delta = d \cdot sen\vartheta_{chiare} = m \cdot \lambda \qquad (m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;....)$$

La condizione per ottenere frange scure (interferenza distruttiva) è:

$$\delta = d \cdot sen\vartheta_{scure} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \cdot \lambda \qquad (m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;....)$$



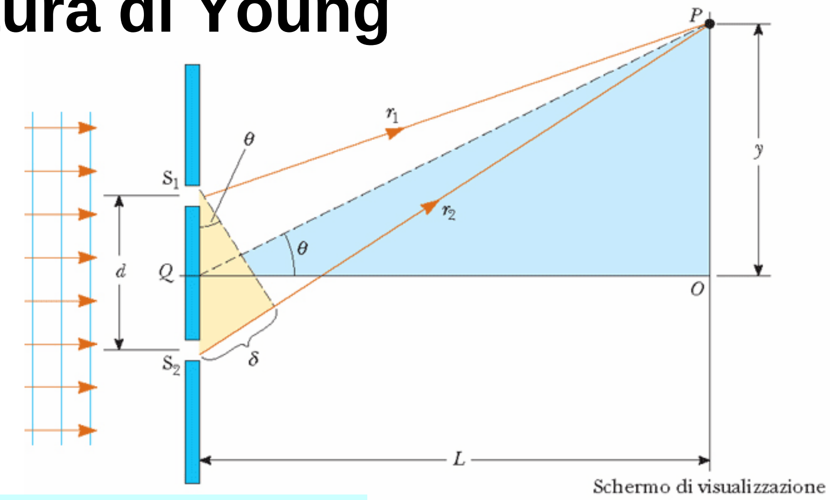


. Francon, J.C. Thierr, *Atlas of Optical Phenomena*, Berlin, Springer-Verlag, 1962)

Il numero interro *m* prende il nome di **numero d'ordine.** La frangia chiara centrale che si ottiene per *m*=0 è detta **massimo di ordine zero**. Il primo massimo da ciascuna delle due parti (per *m*=±1) si chiama massimo di primo ordine, e così via.

Esperimento della doppia fenditura di Young

Oltre alla **posizione angolare** delle frange si possono ricavare le **posizioni lineari** misurate lungo lo schermo da O a P:



$$\tan\vartheta = \frac{OP}{OQ} = \frac{y}{L}$$ da cui:

$$y_{chiare} = L \cdot \tan\vartheta_{chiare}$$

$$y_{scure} = L \cdot \tan\vartheta_{scure}$$

Per **piccoli angoli** (tan θ ~ sen θ) le posizioni delle frange sono **equispaziate** attorno al centro della figura di interferenza:

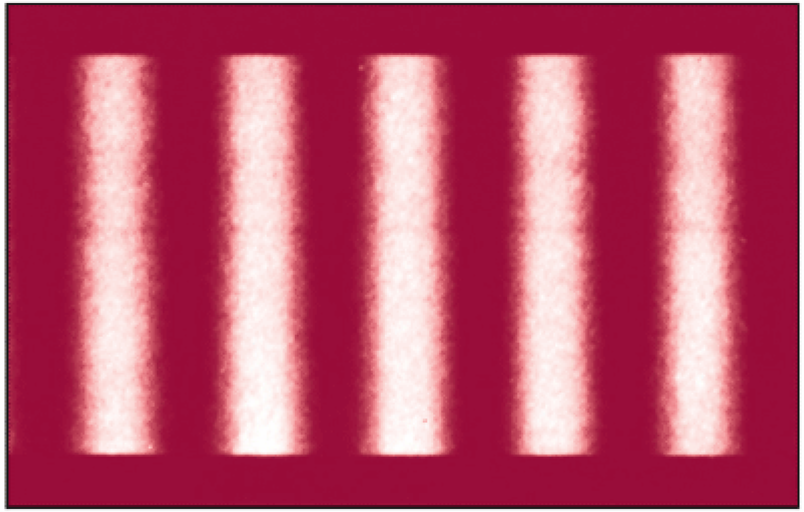
$$\begin{cases} d \cdot sen\vartheta_{chiare} = m \cdot \lambda \\ y_{chiare} = L \cdot \tan\vartheta_{chiare} \end{cases}$$

$$y_{chiare} = L \cdot \left(\frac{m \cdot \lambda}{d} \right)$$

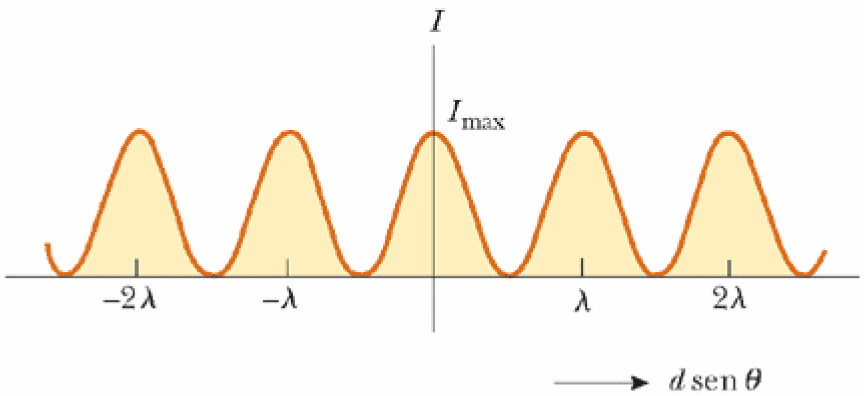
Distribuzione d’intensità della figura di interferenza da doppia fenditura

L’intensità della luce mediata nel tempo per un dato angolo θ si dimostra essere pari a:

$$I_{med} = I_{\max} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot d \cdot sen\vartheta}{\lambda}\right)$$



(Da M. Cagnet, M. Francon, e J.C. Thierr, *Atlas of Optical Phenomena*, Berlin, Springer-Verlag, 1962)



Esempio: misura della lunghezza d'onda di una luce laser

Un laser è usato per illuminare una doppia fenditura. La distanza tra le fenditure è 0.03 mm. Lo schermo di visualizzazione dista dalla doppia fenditura 1.2 m. La frangia chiara del secondo ordine (m=2) si trova a 5.1 cm dalla riga centrale. Determinare la lunghezza d'onda della luce laser

Si osserva innanzitutto che vale la condizione *L>>d.* Le frange chiare si hanno quindi per gli angoli che soddisfano:

$$\begin{cases} d \cdot sen\,\vartheta_{chiare} = m \cdot \lambda \\ y_{chiare} = L \cdot \tan\vartheta_{chiare} \end{cases}$$

da cui:

$$\lambda = \frac{d \cdot sen\,\vartheta_{chiare}}{m} = \frac{d \cdot sen\left(\tan^{-1}\frac{y_{chiare}}{L}\right)}{m}$$

inserendo i valori:

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^{-5}\,metri \cdot sen\left(\tan^{-1}\frac{5.1 \cdot 10^{-2}\,metri}{1.2\,metri}\right)}{2} = 6.4 \cdot 10^{-7}\,metri = 640\,nm$$

Esempio: misura della lunghezza d'onda di una luce laser

Un laser è usato per illuminare una doppia fenditura. La distanza tra le fenditure è 0.03 mm. Lo schermo di visualizzazione dista dalla doppia fenditura 1.2 m. La frangia chiara del secondo ordine (m=2) si trova a 5.1 cm dalla riga centrale. Determinare la lunghezza d'onda della luce laser

In alternativa si può osservare che per angoli piccoli (tan θ ~ sen θ):

$$\begin{cases} d \cdot sen\vartheta_{chiare} = m \cdot \lambda \\ y_{chiare} = L \cdot \tan\vartheta_{chiare} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \cdot sen\vartheta_{chiare} = m \cdot \lambda \\ y_{chiare} = L \cdot sen\vartheta_{chiare} \end{cases}$$

da cui:

$$\frac{d}{L} = \frac{m \cdot \lambda}{y_{chiare}}$$

$$\lambda = \frac{d \cdot y_{chiare}}{m \cdot L} = \frac{0.03mm \cdot 51mm}{2 \cdot 1.2 \cdot 10^3 mm} \approx 6.4 \cdot 10^{-4} mm = 640\ nm$$

Esempio:

Si conduca l'esperimento di Young utilizzando luce di lunghezza d'onda di 500 nm. La distanza tra le fenditure è di 1.2 mm e queste distano 5.4 m dallo schermo. Qual è la distanza tra le frange chiare riprodotte sullo schermo?

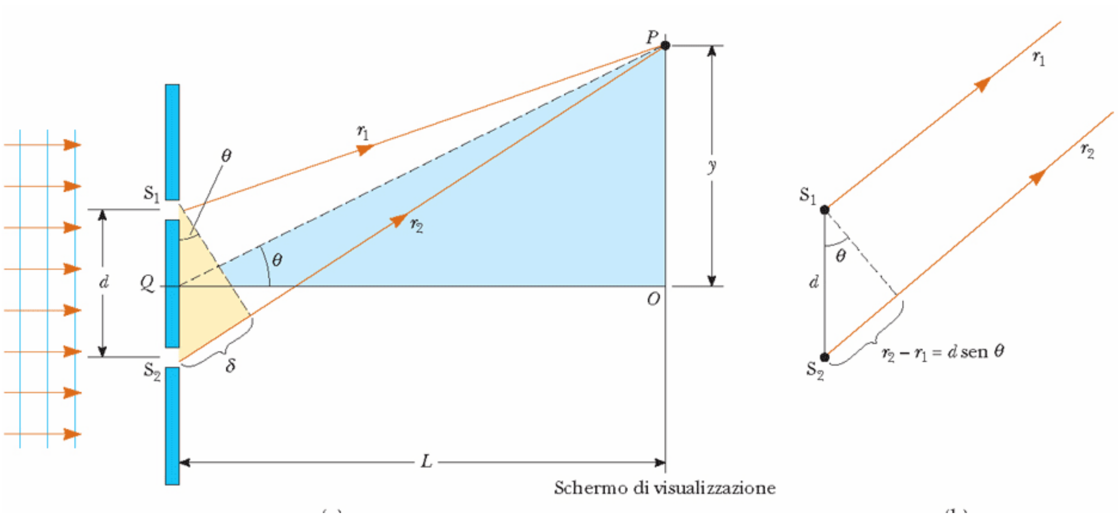
$$y_{chiare} = L \cdot \left(\frac{m \cdot \lambda}{d} \right)$$

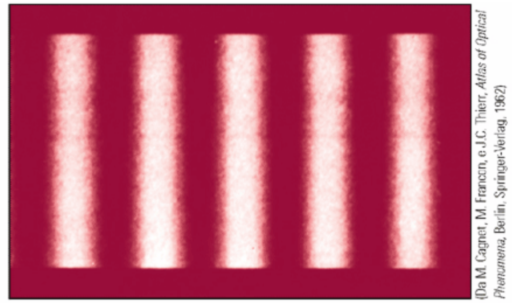
Frange equispaziate. Per m=1 (prima frangia chiara):

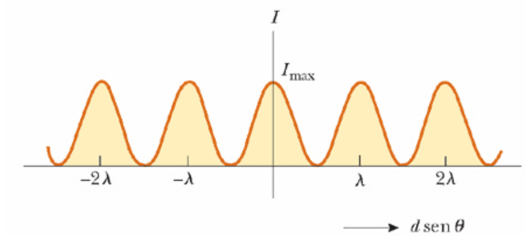
$$y_{chiare} = 5.4 \cdot \left(\frac{1 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{1.2 \cdot 10^{-3}} \right) = 2.25 \cdot 10^{-3}\ m = 2.25\ mm$$

Esempio:

Si conduca l'esperimento di Young utilizzando luce di lunghezza d'onda λ di 600 nm. La distanza tra le fenditure è d=0.250 cm e queste distano L=120 cm dallo schermo. Calcolare la distanza y sopra il massimo centrale per la quale l'intensità media sullo schermo sarà il 75% del massimo.







$$y = L \cdot \tan \vartheta$$

$$I_{med} = I_{max} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot d \cdot sen\vartheta}{\lambda}\right)$$

Esempio:

Si conduca l'esperimento di Young utilizzando luce di lunghezza d'onda λ di 600 nm. La distanza tra le fenditure è d=0.250 cm e queste distano L=120 cm dallo schermo. Calcolare la distanza y sopra il massimo centrale per la quale l'intensità media sullo schermo sarà il 75% del massimo.

$$y = L \cdot \tan \vartheta \qquad I_{med} = I_{\max} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot d \cdot sen\vartheta}{\lambda}\right)$$

$$\frac{I_{med}}{I_{\max}} = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot d \cdot sen\vartheta}{\lambda}\right) \Rightarrow \sqrt{\frac{I_{med}}{I_{\max}}} = \cos\left(\frac{\pi \cdot d \cdot sen\vartheta}{\lambda}\right)$$

$$\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{I_{med}}{I_{\max}}}\right) = \frac{\pi \cdot d \cdot sen\vartheta}{\lambda} \Rightarrow sen\vartheta = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{I_{med}}{I_{\max}}}\right) \cdot \frac{\lambda}{\pi \cdot d}$$

$$sen\vartheta = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{I_{med}}{I_{\max}}}\right) \cdot \frac{\lambda}{\pi \cdot d} = \cos^{-1}\left(\sqrt{0.75}\right) \cdot \frac{600 \cdot 10^{-7}\, cm}{3.14 \cdot 0.25\, cm} = 0.524 \cdot 7.64 \cdot 10^{-5} \approx 4 \cdot 10^{-5}$$

$$\vartheta \approx sen\vartheta \approx \tan\vartheta = 4 \cdot 10^{-5} \Rightarrow y = L \cdot \tan\vartheta = 120\, cm \cdot 4 \cdot 10^{-5} = 4.8 \cdot 10^{-3}\, cm = 48\, \mu m$$

Esempio:

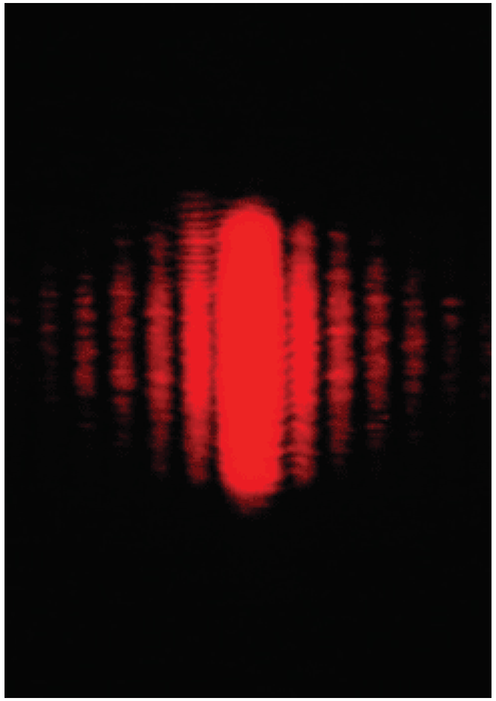
Si conduca l'esperimento di Young utilizzando luce monocromatica. La distanza tra le fenditure è 0.5 mm, e la figura d'interferenza sullo schermo che dista 3.3 m mostra il primo massimo laterale a 3.4 mm dal centro della figura. Qual è la lunghezza d'onda?

Per angoli piccoli (tan θ ~ sen θ):

$$\lambda = \frac{d \cdot y_{chiare}}{m \cdot L} = \frac{0.5mm \cdot 3.4mm}{1 \cdot 3.3 \cdot 10^3\, mm} \approx 5.15 \cdot 10^{-4}\, mm = 515\, nm$$

Figure di diffrazione

La **diffrazione** è il fenomeno che avviene quando durante il suo percorso un'onda incontra una fenditura o un ostacolo avente dimensioni confrontabili con la **lunghezza d'onda**



Si osserva una **figura di diffrazione** consistente in aree chiare e scure. Per una stretta fenditura si ha una banda centrale larga ed intensa (**massimo centrale**) affiancata da bande secondarie più strette e meno intense (**massimi secondari**) e da una serie di bande oscure (**minimi**).

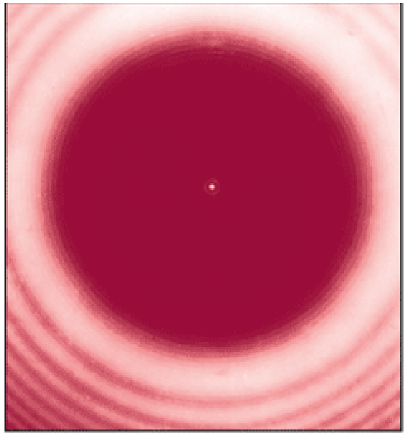
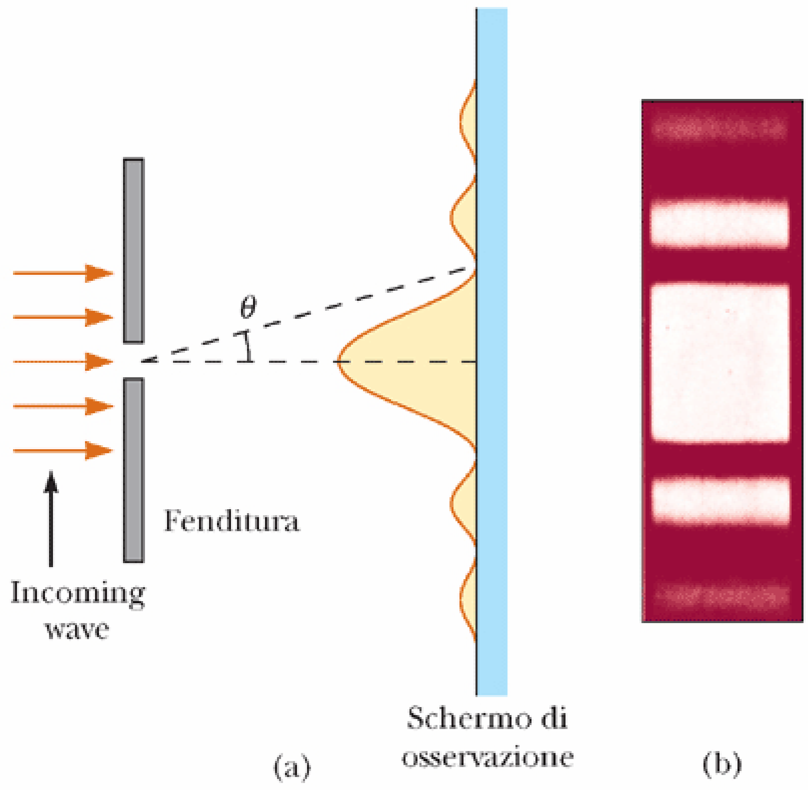


Figura di diffrazione di una moneta ripresa con la moneta a metà strada tra lo schermo e la sorgente. Si osserva un punto luminoso al centro, dovuto all'interferenza costruttiva tra le onde difratte da tutti i punti sul bordo della moneta.

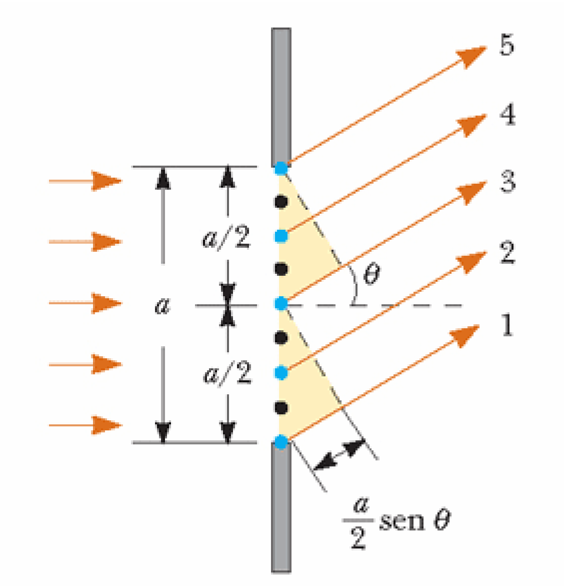
Figure di diffrazione



Schermo di osservazione lontano dalla fenditura → raggi che giungono sullo schermo approssimativamente paralleli (in alternativa uso di una lente convergente): **figura di diffrazione di Fraunhofer**

Ogni punto della fenditura agisce come sorgente puntiforme di onde (**principio di Huygens).** La luce proveniente da una punto della fenditura interagisce quindi con quella proveniente dagli altri punti e a seconda della differenza di fase tra le onde interferenti si avrà interferenza costuttiva o distruttiva

Figure di diffrazione



Dividiamo la fenditura in due parti uguali e consideriamo gli estremi della metà fenditura inferiore. Se la differenza di cammino tra l'onda 1 e l'onda 3 è pari a mezza lunghezza d'onda (sfasamento di 180°) si ha interferenza distruttiva : $\frac{a}{2} \cdot sen\vartheta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \quad sen\vartheta = \frac{\lambda}{a}$

Stessa cosa vale per tutte le coppie di punti che distano tra loro di una quantità *a/2* (esempio onda 3 e 5)

Se si divide la fenditura in quattro parti e si ripete il ragionamento si ha:

$$\frac{a}{4} \cdot sen\vartheta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \quad sen\vartheta = \frac{2\lambda}{a}$$

Se si divide la fenditura in sei parti: $\frac{a}{6} \cdot sen\vartheta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \quad sen\vartheta = \frac{3\lambda}{a}$

La condizione generale per l'interferenza distruttiva è:

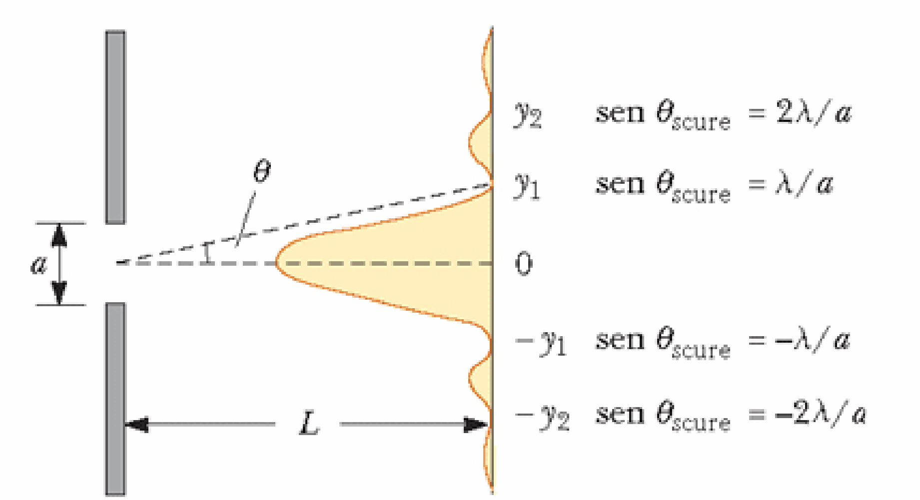
$$sen\vartheta_{scure} = m \cdot \frac{\lambda}{a} \quad (m = \pm 1; \pm 2; \pm 3; ....)$$

Figure di diffrazione

$$sen\,\vartheta_{scure} = m \cdot \frac{\lambda}{a} \quad (m = \pm 1; \pm 2; \pm 3; ....)$$

Questa relazione fornisce i valori di θ in corrispondenza dei quali la figura di diffrazione ha intensità nulla (frange scure)

Non dice invece nulla sul come varia l'intensità della luce sullo schermo



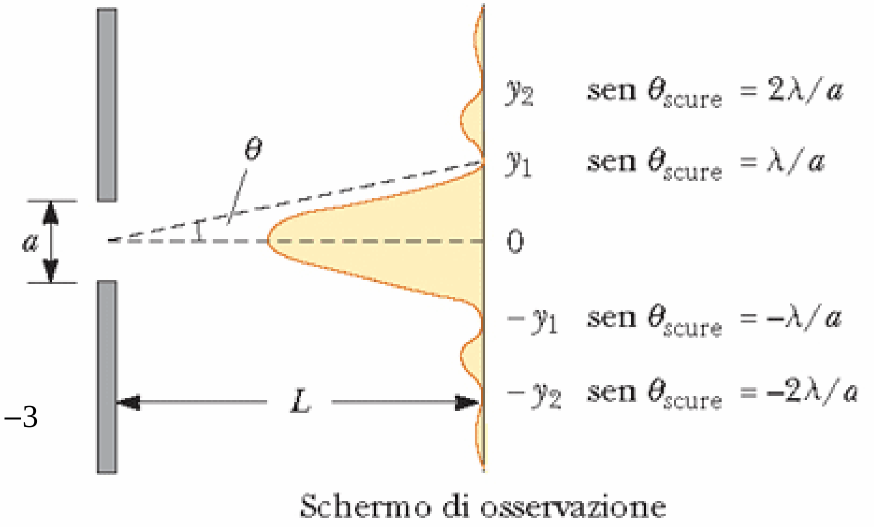
Schermo di osservazione

Qualitativamente si ha una larga frangia centrale chiara, con ai lati un alternarsi di frange chiare molto meno intense. Le varie frange scure si trovano per i valori di θ che soddisfano la relazione sopra.

Esempio:

Una luce di lunghezza d'onda di 580 nm incide su una fenditura di larghezza 0.3 mm. Lo schermo di osservazione è posto a 2 m dalla fenditura. Trovare le posizioni delle prime due frange scure e la larghezza della frangia centrale chiara.

$$sen\vartheta_{scure} = m \cdot \frac{\lambda}{a} \quad (m = \pm 1; \pm 2; \pm 3; ....)$$



Le prime frange scure che fiancheggiano la frangia chiara centrale corrispondono a m=±1

$$sen\vartheta_{scure} = \pm\frac{\lambda}{a} = \pm\frac{580\cdot 10^{-9}\,m}{0.3\cdot 10^{-3}\,m} = \pm 1.933\cdot 10^{-3}$$

Per ricavare la posizione lineare sullo schermo si osserva: $y_1 = L\cdot\tan\vartheta$

Per angoli piccoli vale sempre l'approssimazione: tan θ~ sen θ

$$y_1 \approx L\cdot sen\vartheta = 2m\cdot\left(\pm 1.993\cdot 10^{-3}\right) = \pm 3.87\cdot 10^{-3}\,m = \pm 3.87\,mm$$

La larghezza della frangia centrale chiara è:

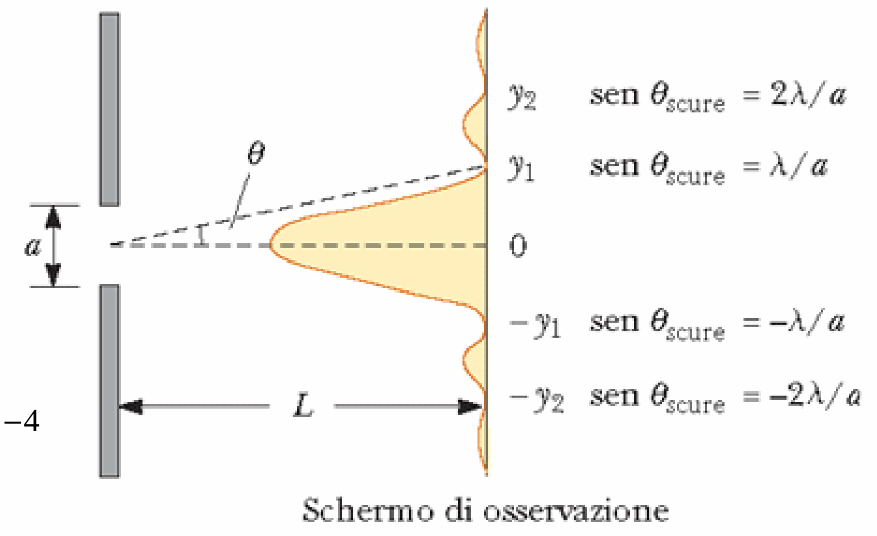
$$\text{larghezza} = \left|2y_1\right| = 7.74\cdot 10^{-3}\,m = 7.74\,mm$$

>> larghezza della fenditura

Esempio:

Una luce di lunghezza d'onda di 580 nm incide su una fenditura di larghezza 0.3 mm. Lo schermo di osservazione è posto a 2 m dalla fenditura. Cosa succede se la fenditura è aumentata di un ordine di grandezza a 3 mm?

$$sen\vartheta_{scure} = m\cdot\frac{\lambda}{a} \qquad (m = \pm 1; \pm 2; \pm 3; ....)$$



Le prime frange scure che fiancheggiano la frangia chiara centrale corrispondono a m=±1

$$sen\vartheta_{scure} = \pm\frac{\lambda}{a} = \pm\frac{580\cdot 10^{-9}m}{3\cdot 10^{-3}m} = \pm 1.933\cdot 10^{-4}$$

$$y_1 \approx L\cdot sen\vartheta = 2m\cdot\left(\pm 1.993\cdot 10^{-4}\right) = \pm 3.87\cdot 10^{-4}m = \pm 0.387mm$$

La larghezza della frangia centrale chiara è:

$$\text{larghezza} = |2y_1| = 7.74\cdot 10^{-4}m = 0.774mm$$ << larghezza della fenditura

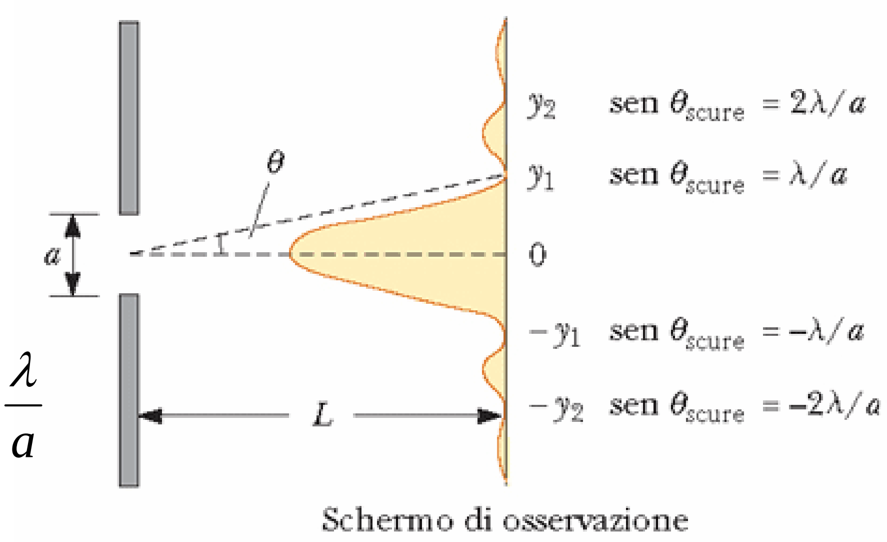
Per fenditure larghe i massimi e i minimi sono molto vicini che si osserva un'unica zona centrale chiara che appare come l'immagine della fenditura

Esempio:

La distanza tra il primo ed il quinto minimo di una figura di diffrazione da singola fenditura è di 0.35 mm e lo schermo dista dalla fenditura 40 cm. La lunghezza d'onda della luce incidente è 550 nm.

A) Trovare la larghezza della fenditura

B) Calcolare l'angolo di diffrazione relativo al primo minimo



Larghezza della fenditura

$$sen\,\vartheta_{scure} = m \cdot \frac{\lambda}{a} \quad (m = \pm 1; \pm 2; \pm 3; ....)$$

$$y_1 \approx L \cdot sen\,\vartheta_1 = L \cdot \frac{\lambda}{a} \qquad y_5 \approx L \cdot sen\,\vartheta_5 = L \cdot 5 \cdot \frac{\lambda}{a}$$

$$y_5 - y_1 = L \cdot 4 \cdot \frac{\lambda}{a} = 0.35mm$$

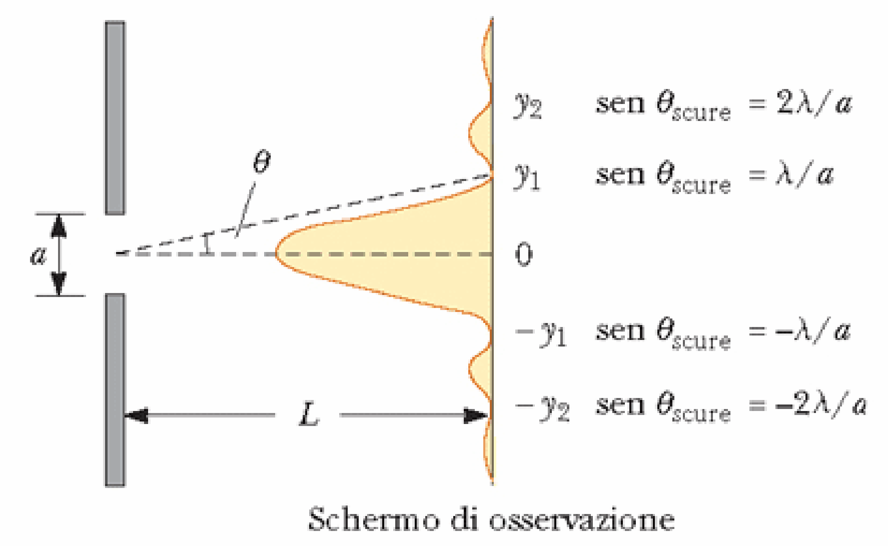
$$a = \frac{L \cdot 4 \cdot \lambda}{0.35mm_1} = \frac{400mm \cdot 4 \cdot 550 \cdot 10^{-6}\,mm}{0.35mm} = 2.5mm$$

Esempio:

La distanza tra il primo ed il quinto minimo di una figura di diffrazione da singola fenditura è di 0.35 mm e lo schermo dista dalla fenditura 40 cm. La lunghezza d'onda della luce incidente è 550 nm.

A) Trovare la larghezza della fenditura

B) Calcolare l'angolo di diffrazione relativo al primo minimo



Angolo di diffrazione del primo minimo

$$sen\,\vartheta_{scure} = m\cdot\frac{\lambda}{a} \qquad (m = \pm1; \pm 2; \pm 3; ....)$$

$$sen\,\vartheta_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{550\cdot10^{-6}\,mm}{2.5mm} = 2.4\cdot10^{-4}$$

$$\vartheta_1 = 2.4\cdot10^{-4}\,rad$$